CHE-330 Module 6
Correction

Exercice 6.1

La sphère de sciure est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède, et à la force de traînée :

$$\rho * \frac{4}{3}\pi r^3 g - \rho_{air} * \frac{4}{3}\pi r^3 g - C_T \frac{\pi r^2}{2}\rho_{air} v_{lim}^2 = 0$$

Il faut faire une supposition sur le régime de l'écoulement. Considérant que la particule a un diamètre très faible, on peut supposer que Re < 6000 et donc :

$$C_T = \left(\sqrt{\frac{24}{Re}} + 0.5407\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{24 * \mu}{\rho_{air} v_{\mathrm{lim}} * 2r}} + 0.5407\right)^2$$

On obtient :

$$(\rho - \rho_{air}) * \frac{4}{3}\pi r^3 g - \frac{\pi r^2}{2} * \left(\sqrt{\frac{24 * \mu}{\rho_{air} v_{\mathrm{lim}} * 2r}} + 0.5407\right)^2 \rho_{air} v_{lim}^2 = 0$$

Application numérique :

$$(630 - 1.2) * \frac{4}{3}\pi(10^{-5})^3 * 9.81 - \frac{\pi(10^{-5})^2}{2} * \left(\sqrt{\frac{24 * 1.82 * 10^{-5}}{1.2 * v_{\mathrm{lim}} * 2 * 10^{-5}}} + 0.5407\right)^2 1.2 * v_{lim}^2 = 0$$

$$2.584 * 10^{-11} - 1.571 * 10^{-10} * \left(\sqrt{\frac{18.2}{v_{\mathrm{lim}}}} + 0.5407\right)^2 * 1.2 * v_{lim}^2 = 0$$

On trouve, par résolution graphique, que :

$$\underline{\boldsymbol{v_{lim} = 7.4 * 10^{-3}\ m.s^{-1}}}$$

On vérifie le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho v_{lim} D}{\mu} = \frac{1.2 * 7.4 * 10^{-3} * 2 * 10^{-5}}{1.82 * 10^{-5}} = 9.76 * 10^{-3}$$

On est donc en présence d'un écoulement laminaire, qui suit la loi de Stokes (Re < 0.1). On aurait pu utiliser directement l'expression simplifiée :

$$C_T = \frac{24}{Re}$$

qui conduit à l'expression :

$$v_{lim} = \frac{2}{9}\,(\rho - \rho_{air})\frac{r^2 g}{\mu}$$

On obtient alors :

$$\underline{\boldsymbol{v_{lim} = 7.53 * 10^{-3}\ m.s^{-1}}}$$

Exercice 6.2

Le nombre de Reynolds associé à l'écoulement est :

$$Re = \frac{\rho_{air} v D}{\mu_{air}} = \frac{1.29 * 27.8 * 2.3}{1.72 * 10^{-5}} = 4.8 * 10^6$$

Pour cette valeur, on lit sur le graph que $C_T \approx 0.8$.

Par conséquent,

$$F = C_T * \frac{DH}{2}\rho_{air} v_\infty^2$$

Application numérique :

$$F = 0.8 * \frac{2.3 * 20}{2} * 1.29 * 27.8^2 = \boldsymbol{18.3\ kN}$$

Le torque à une distance z, sur un élément infinitésimal de hauteur dz, est donné par :

$$d\tau = dF.z = C_T * \frac{D * dz}{2}\rho_{air} v_\infty^2 . z$$

Donc le torque total qui s'applique à la base de la colonne est obtenu par intégration sur toute la hauteur :

$$\tau = \int_{hauteur} d\tau = \int_0^H C_T * \frac{D * dz}{2}\rho_{air} v_\infty^2 . z = C_T * \frac{D}{2}\rho_{air} v_\infty^2 \int_0^H z\, dz$$

$$\tau = C_T * \frac{D}{2}\rho_{air}v_\infty^2 * \frac{H^2}{2}$$

$$\underline{\boldsymbol{\tau = 183\ kN.m}}$$

Exercice 6.3

La force de traînée vaut :

$$F = C_T \frac{A}{2}\rho_{air}v^2$$

$$F = 0.24 * \frac{2 * 1.5}{2} * 1.2 * \left(\frac{100}{3.6}\right)^2 = \mathbf{333.3\ N}$$

La puissance associée à cette force vaut :

$$P = F.v$$

$$P = 333.3 * \frac{100}{3.6} = \mathbf{9259\ W}$$

On en déduit que la durée de fonctionnement de la batterie sera de :

$$t = \frac{85 * 10^3[Wh]}{9259[W]} = 9.18\ h$$

Ce qui correspond à une distance de :

$$d = v * t = 9.18 * 100 = \mathbf{918\ km}$$

On obtient, bien entendu, une valeur supérieure à celle spécifiée par le fabricant, puisque la force de traînée n'est pas la seule source de perte d'énergie lorsque le véhicule est en mouvement (frottement sur la route, masse du véhicule…). Cependant, on note que la force de traînée joue une part non négligeable dans ces pertes d'énergie.

Exercice 6.4:

La plaque est très fine (épaisseur d = 1mm). On s'attend donc à ce que la température y soit uniforme. Pour prouver cette hypothèse, on veut une estimation du nombre de Biot.

$$Bi = \frac{hd}{k}$$

Typiquement pour la convection naturelle d'un gaz, le coefficient de transfert de chaleur est compris entre 5 et 37 $W.m^{-2}.K^{-1}$ (cf Transport phenomena I module 9). On peut donc prendre 37 $W.m^{-2}.K^{-1}$ comme valeur maximale pour h.

Par conséquent la valeur maximale de Bi sera :

$$Bi = \frac{37 * 10^{-3}}{40} = 9.25 * 10^{-4} \ll 0.1$$

Ainsi le nombre de Biot est très faible et la température est uniforme dans toute la plaque. On peut donc considérer que les deux faces sont à la même température T_s.

Le flux de chaleur provenant de la face supérieure de la plaque est donné par :

$$Q_{up} = h_{up} A (T_s - T_{\infty,up})$$

Et le flux de chaleur reçu par la face inférieure est donné par :

$$Q_{down} = h_{down} A (T_s - T_{\infty,down})$$

Pour déterminer la valeur de ces flux, il nous faut déterminer la température T_s de la plaque et la valeur des coefficients de transfert de chaleur (qui découle aussi de T_s).

Pour déterminer cette température, on utilise l'égalité des flux en régime stationnaire :

$$Q = |Q_{up}| = |Q_{down}|$$

$$\left|h_{up}(T_s - T_{\infty,up})\right| = \left|h_{down}(T_s - T_{\infty,down})\right|$$

Il faut maintenant exprimer les coefficients h en fonction des propriétés du fluide.

$$h_i = \frac{k_{air}\, Nu_i}{L} \ (i = up \text{ or } down)$$

Et le nombre de Nusselt pour une plaque orientée de cette manière est donné par (cf cours) :

$$Nu_i = 0.15\, Ra_{L,i}^{1/3} \ (si\ 10^7 < Ra_{L,i} < 10^{11}, \text{à vérifier})$$

Avec

$$Ra_{L,i} = Gr_{L,i} Pr_i$$

Et

$$Gr_{L,i} = \frac{g\beta_i L^3 \rho_i^2}{\mu_i^2} \left|T_s - T_{\infty,i}\right|$$

$$Pr_{\mathrm{i}} = \frac{\mu_i c_i}{k_{air}}$$

Il faut donc estimer les différents paramètres à la température de film, qui est différente selon que l'on considère la surface supérieure ou la surface inférieure de la plaque. De plus il faut faire une approximation sur la température T_s que l'on s'attend à trouver. Etant donné la géométrie des échanges de chaleur, on peut penser que la température de la plaque sera proche de la température moyenne entre $T_{\infty,down}$ et $T_{\infty,up}$. On suppose donc que : $T_s \approx 5°C$

- Pour la surface supérieure : $T_{f,up} = \frac{1}{2} * \left(T_{\infty,up} + T_s\right) = -2.5°C$

  A cette température :
  $\beta_{up} = 0.003695\ K^{-1}$
  $\rho_{up} = 1.32\ kg.m^{-3}$
  $\mu_{up} = 1.87 * 10^{-5}\ N.s.m^{-2}$
  $c_{up} = 1000\ J.kg^{-1}.K^{-1}$

  En remplaçant dans les expressions littérales on obtient :

  $$Gr_{L,up} = 4.25 * 10^8\ |T_s - 263|$$

  $$Pr_{up} = 0.748$$

  Donc

  $$Ra_{L,up} = 3.18 * 10^8 * |T_s - 263|$$

  Note : l'expression utilisée pour le calcul de Nu est donc valide

  $$Nu_{up} = 102.4 * |T_s - 263|^{\frac{1}{3}}$$

  $$\boldsymbol{h_{up} = \frac{k_{air}\ Nu_{up}}{L} = 1.925|T_s - 263|^{\frac{1}{3}}}$$

- Pour la surface inférieure : $T_{f,down} = \frac{1}{2} * \left(T_{\infty,down} + T_s\right) = 12.5°C$

  A cette température :
  $\beta_{down} = 0.003501\ K^{-1}$
  $\rho_{down} = 1.25\ kg.m^{-3}$
  $\mu_{down} = 1.87 * 10^{-5}\ N.s.m^{-2}$
  $c_{down} = 1000\ J.kg^{-1}.K^{-1}$

  En remplaçant dans les expressions littérales on obtient :

$$Gr_{L,down} = 3.61 * 10^8 \, |T_s - 293|$$

$$Pr_{down} = 0.748$$

Donc

$$Ra_{L,down} = 2.70 * 10^8 * |T_s - 293|$$

<u>Note</u> : l'expression utilisée pour le calcul de Nu est donc valide

$$Nu_{down} = 96.95 * |T_s - 293|^{\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{h_{down} = \frac{k_{air}\, Nu_{down}}{L} = 1.822 * |T_s - 293|^{\frac{1}{3}}}$$

Pour déterminer la valeur exacte de T_s, on revient à l'égalité :

$$\left|Q_{up}\right| = |Q_{down}|$$

$$\left|h_{up}\left(T_s - T_{\infty,up}\right)\right| = \left|h_{down}(T_s - T_{\infty,down})\right|$$

$$1.925 * |T_s - 263|^{\frac{4}{3}} = \ 1.822 * |T_s - 293|^{\frac{4}{3}}$$

Cette équation donne comme valeur :

$$\boxed{\boldsymbol{T_s = 277.7\ K}}$$

Note : prendre $T_s \approx 298K$ pour estimer les propriétés de l'air était donc justifié

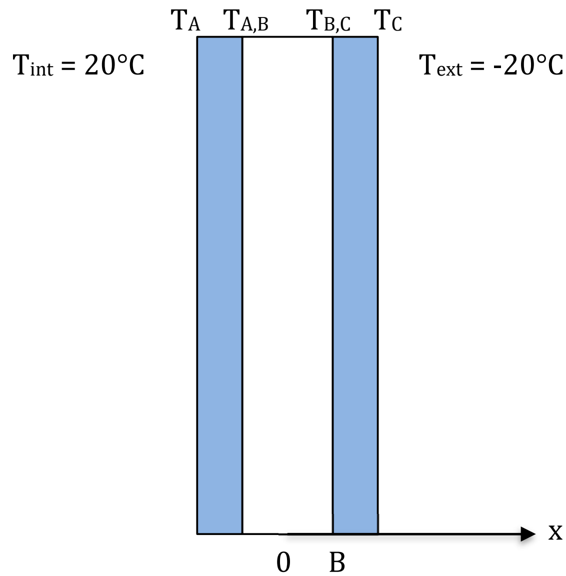
On peut maintenant calculer le flux de chaleur :

$$Q = h_{up}A(T_s - T_{\infty,up})$$

$$Q = \ 1.925 * (277.7 - 263)^{\frac{4}{3}} * 1.33 * 0.75$$

$$\boxed{\boldsymbol{Q = 69.15\ W}}$$

Exercice 6.5:



On utilise des valeurs moyennes pour les propriétés de l'air :

$$h_{ext} = h_{int} = 10\, W.m^{-2}.K^{-1}$$

$$k_{air} = 0.024\, W.m^{-1}K^{-1}$$

L'expression du flux de chaleur à travers la vitre est :

$$q = \frac{T_{int} - T_{ext}}{\frac{1}{h_{int}} + \frac{2L_{verre}}{k_{verre}} + \frac{L_{air}}{k_{air}} + \frac{1}{h_{ext}}}$$

Remarque : on considère ici que le transfert de chaleur à travers l'air se fait exclusivement par conduction, car la longueur de la vitre étant très grande devant sa largeur, le transfert de chaleur par convection est négligeable.

$$q = \frac{40}{0.1 + 2 * \frac{0.003}{0.96} + \frac{0.006}{0.024} + 0.1}$$

$$\underline{\boldsymbol{q = 87.7\, W.m^{-2}}}$$

La vitesse de l'écoulement est donnée par (cf. cours) :

$$v_z = \frac{(\bar{\rho} g \bar{\beta} \Delta T) B^2}{12\mu} \left(\left(\frac{y}{B}\right)^3 - \frac{y}{B} \right)$$

Pour obtenir la vitesse maximale, on peut regarder où la dérivée de v_z s'annule :

$$\frac{dv_z}{dy} = \frac{\left(\bar{\rho} g \bar{\beta} \Delta T\right) B^2}{12\mu}\left(\frac{3y^2}{B^3} - \frac{1}{B}\right)$$

$$\frac{dv_z}{dy} = 0 \Leftrightarrow y_{max} = \pm \frac{B}{\sqrt{3}}$$

donc

$$v_{max} = \left|\frac{\left(\bar{\rho} g \bar{\beta} \Delta T\right) B^2}{12\mu}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \left|\frac{\left(\bar{\rho} g \bar{\beta} \Delta T\right) B^2}{18\sqrt{3}\mu}\right|$$

Pour l'air on prendra :

$$\bar{\rho} = 1.29\ kg.m^{-3}$$
$$\bar{\beta} = 3.6 * 10^{-3}\ K^{-1}$$
$$\mu = 1.7 * 10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}$$

Reste à évaluer ΔT :

$$T_{A,B} = T_{int} - q * \left(\frac{1}{h_{int}} + \frac{L_{verre}}{k_{verre}}\right)$$

$$T_{A,B} = 20 - 87.7 * \left(0.1 + \frac{0.003}{0.96}\right) = \mathbf{10.9°C}$$

De même :

$$T_{B,C} = T_{ext} + q * \left(\frac{1}{h_{ext}} + \frac{L_{verre}}{k_{verre}}\right)$$

$$T_{B,C} = -20 + 87.7 * \left(0.1 + \frac{0.003}{0.96}\right) = \mathbf{-10.9°C}$$

Par conséquent

$$\Delta T = T_{A,B} - T_{B,C} = \mathbf{21.8\ °C}$$

Enfin :

$$v_{max} = \left|\frac{1.29 * 9.81 * 0.0036 * 21.8 * 0.003^2}{18\sqrt{3} * 1.7 * 10^{-5}}\right| = \mathbf{0.017\ m.s^{-1}}$$

<u>L'air se déplace donc de 1.7 cm.s^{-1} à l'intérieur de la vitre.</u>